Informatica Medica a.a. 2012-2013

1 Esercitazione n^o 3: Integrazione

In molti casi reali la valutazione dell'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

non è possibile, in tal caso si considera una *valutazione numerica* che approssima $I(f)$.

L'obiettivo è di ottenere il valore dell'integrale con la precisione richiesta e con il minore numero possibile di valutazioni della funzione integranda.

1.1 Integrale come somma: formula di Eulero

Il metodo più semplice consiste nell'eseguire una partizione del dominio di integrazione e nell'approssimare l'area sottesa dalla funzione tramite una *somma di rettangoli*. In particolare consideriamo la *formula di Eulero*.

Dati N punti su cui valutare la funzione integranda si divida l'intervallo $[a, b]$ nei punti $x_i = a + i\,h$ con $h = (b - a)/(N - 1)$ e $i = 0, 1, \cdots, N - 2$, pertanto si consideri la seguente approssimazione

$$I(f) \approx h \sum_{i=0}^{N-2} f_i \qquad \text{dove } f_i = f(x_i)$$

Esercizio 1 Scrivere una funzione per la valutazione di un integrale definito attraverso la formula di Eulero. Si fornisca l'intervallo di integrazione, il numero di punti su cui calcolare l'integrale e la funzione integranda. Si calcoli l'integrale per $N = \{10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7\}$ e si valuti il corrispondente valore del passo h. Visualizzare il grafico del "valore vero" e del "valore approssimato" (dove possibile) al variare di N. Commentare i risultati.

Nel calcolo dell'integrale è importante considerare l'errore relativo approssimato con cui si desidera valutare l'integrale: cioè valutare l'errore che si commette sul valore dell'integrale considerando due successive partizioni dell'intervallo di integrazione:

$$|Q_m(f) - Q_n(f)| < |Q_m(f)|\epsilon$$

Si suggerisce di dimezzare di volta in volta i sottointervalli h: in tal caso si ha $m = 2n$.

Esercizio 2 Scrivere una funzione per la valutazione di un integrale definito attraverso la formula di Eulero: la funzione ritorna il valore dell'integrale con la precisione (errore relativo approssimato) richiesta (e.g. 10^{-2}). Come argomenti si considerano l'intervallo di integrazione, la precisione richiesta e la funzione integranda.

Utilizzare le seguenti relazioni per testare gli esercizi proposti.

$$I(f) = \int_0^1 e^x dx = e - 1, \qquad I(f) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}, \qquad I(f) = \int_0^1 \cos(x) dx = \sin(1),$$

$$I(f) = \int_{-3}^3 (x^2 + 0.1x - 1) dx, \qquad I(f) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(x - 0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x - 0.9)^2 + 0.04} - 6 \right) dx$$